

Résolution des équations de la mécanique des milieux continus par la méthode des éléments-finis, en petites perturbations.

Simon Le Floc'h

Biomécanique des Interactions et de l'Organisation des Tissus et des Cellules
Laboratoire de Mécanique et Génie Civil de Montpellier
Université Montpellier 2

École thématique sur la Simulation Biomédicale
2 juillet 2014



Sommaire :

- Équations de la mécanique des milieux continus (rappel de hier), principe variationnel
- Au cœur de la M.E.F.
- Étapes générales de résolution
- Mini-TP : application de conditions aux limites et convergence maillage, pb de concentration de contrainte
- Points critiques

Conservation de la quantité de mouvement

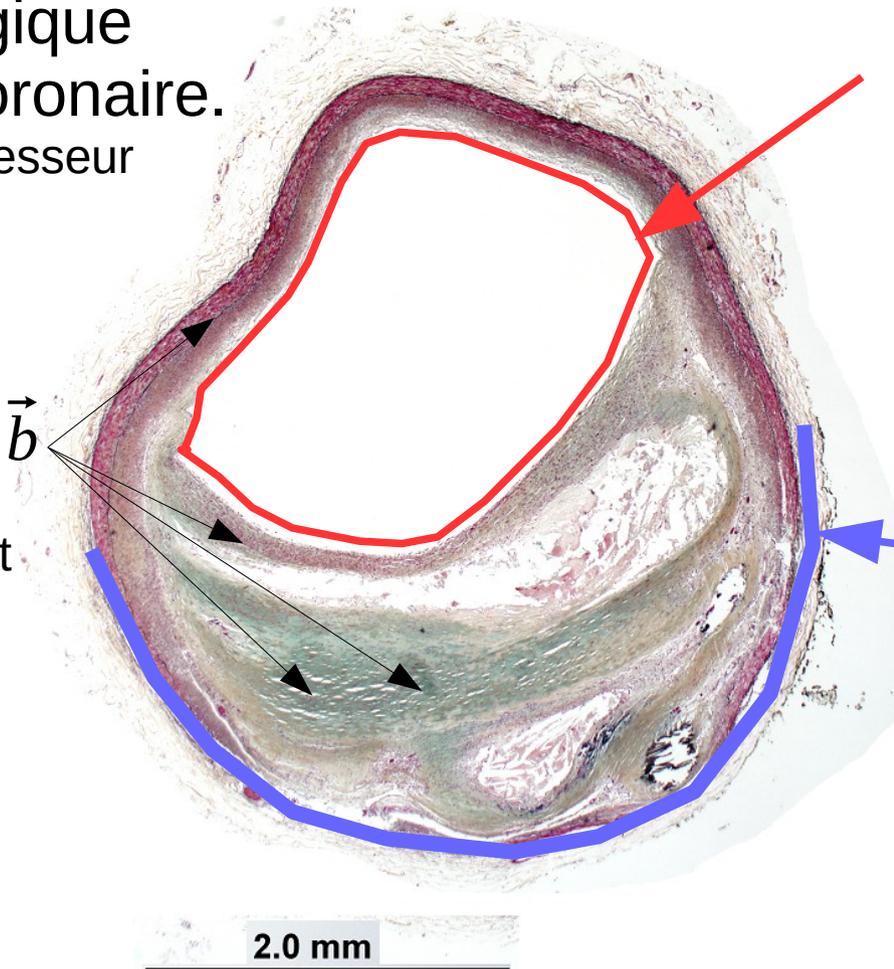
$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \vec{b}$	Conservation de la quantité de mouvement « locale », issu de la loi de Newton
$\vec{n} \boldsymbol{\sigma} = \vec{T}_{ext} \quad \text{sur } \tau_{T_{ext}}$	Condition limite de type force appliquée (surfactive ou linéique)
$\vec{v} = \vec{v}_{ext} \quad \text{sur } \tau_{v_{ext}}$	Condition limite de type déplacement imposé

Conservation de la quantité de mouvement

Coupe histologique
d'une artère coronaire.
Laboratoire du professeur
Virmani.

$$\rho_0 \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho_0 \vec{b}$$

Équilibre local en tout
point



$$\tau_{T_{ext}}$$
$$\vec{n} \boldsymbol{\sigma} = \text{pression}(t) \vec{n}$$

$$\tau_{v_{ext}}$$
$$\vec{v} = \vec{0}$$

Principe des travaux virtuels, ou forme faible

$$\iiint_{\Omega} u_i^* \rho \frac{d v_i}{d t} d \Omega = - \iiint_{\Omega} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_j} \sigma_{ji} d \Omega + \iiint_{\Omega} u_i^* \rho b_i d \Omega + \iint_{\tau_i} u_i^* t_i d \tau$$

Quantité de
mouvement
virtuelle

Puissance
intérieure

Puissance
extérieure
« volumique »

Puissance
extérieure

- Intérêt : Conservation de la quantité de mouvement + conditions limites en force en 1 équation !
- Équivalence avec la forme forte
- **C'est cette équation qui est utilisée en M.E.F.**

Fonctions d'interpolation du champ de déplacement

- Discrétisation de l'espace

Double approximation



Fonctions d'interpolation du champ de déplacement

- Discrétisation de l'espace
- Choix d'une famille de fonctions d'interpolation qui approxime le déplacement à l'intérieur d'une maille (élément) :

Double approximation



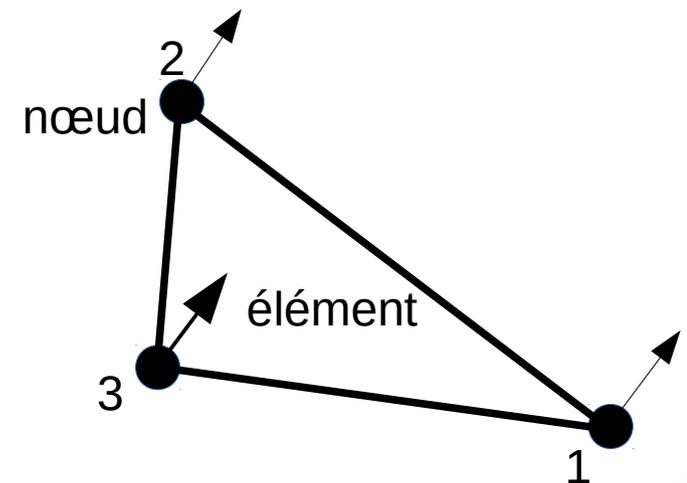
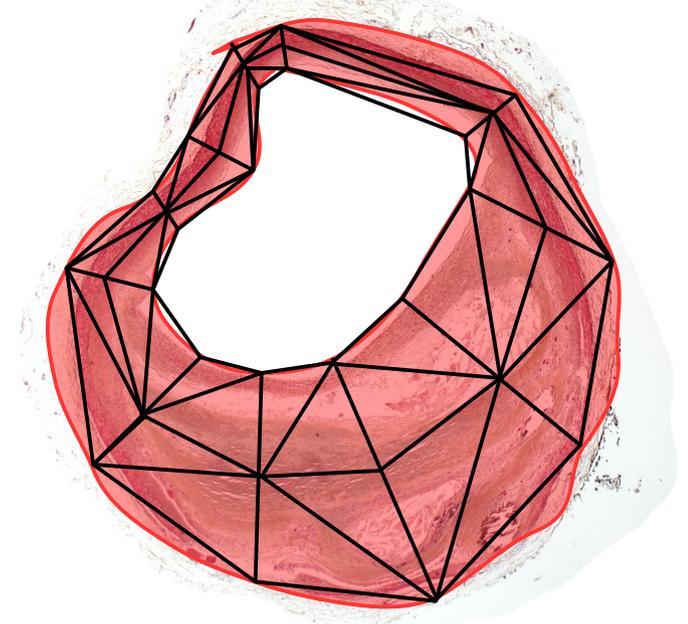
Fonctions d'interpolation du champ de déplacement

- Discrétisation de l'espace
- Choix d'une famille de fonctions d'interpolation qui approxime le déplacement à l'intérieur d'une maille (élément) :

$$\vec{U}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_1 + a_2 x + a_3 y \\ a_5 + a_6 x + a_7 y \end{Bmatrix}$$

Coefficients a_i propre à chaque maille

Double approximation



Fonctions d'interpolation du champ de déplacement

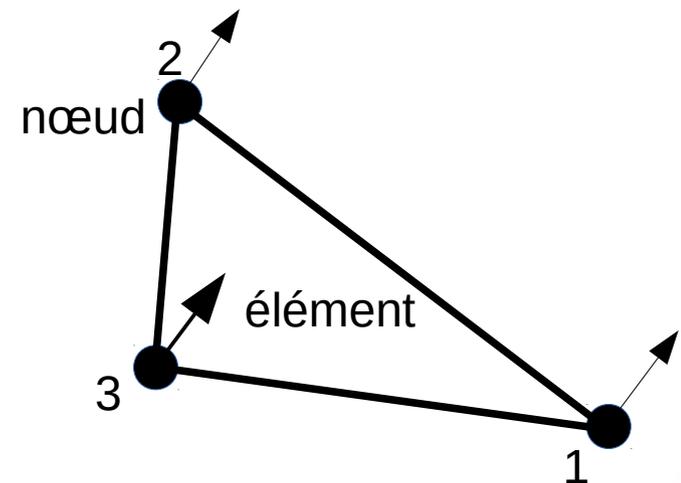
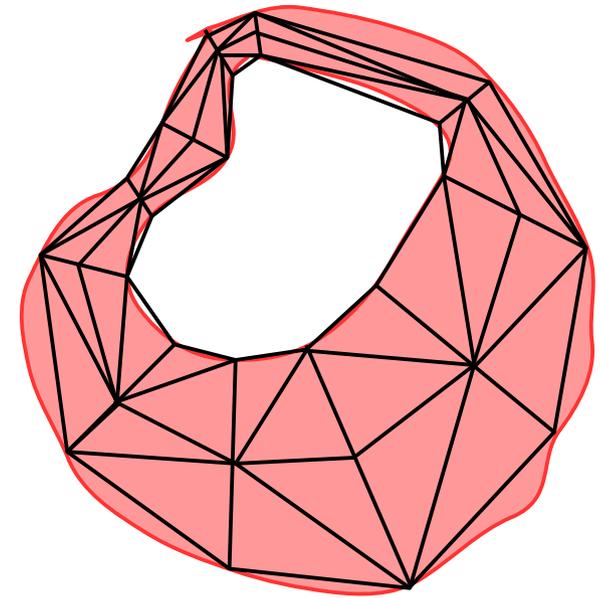
- Déplacement en fonction des déplacements aux nœuds :

$$\vec{U}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \\ b_4 v_1 + b_5 v_2 + b_6 v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{U}(x, y) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & b_5 & 0 & b_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Avec, par exemple pour b_1 :

$$b_1(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_1 + b_1 x + c_1 y)$$



Fonctions d'interpolation du champ de déplacement

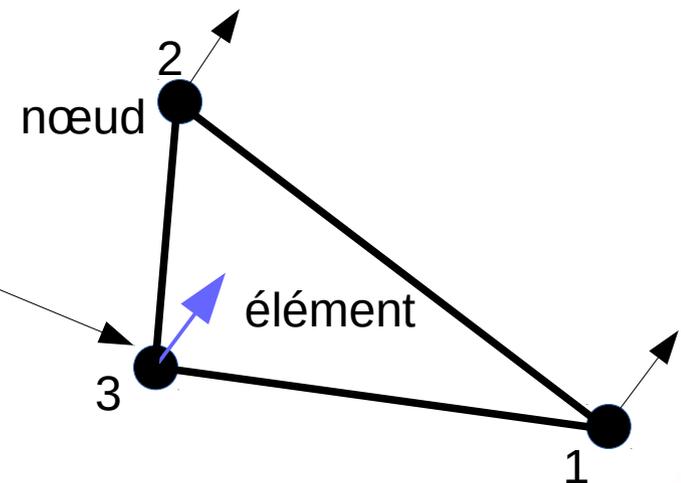
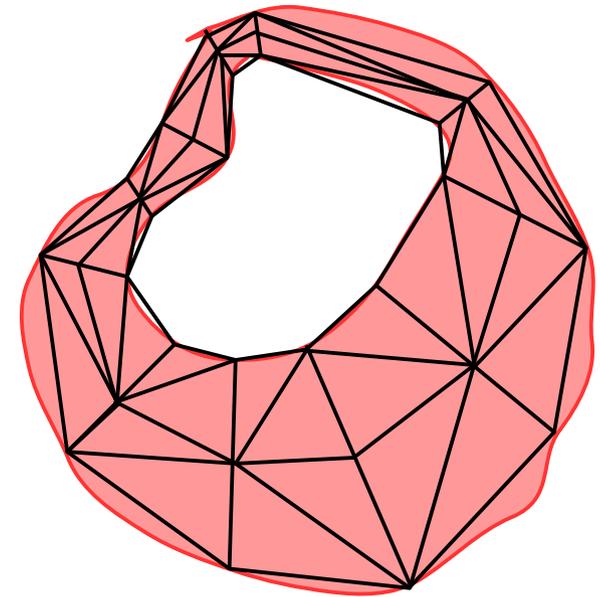
- Déplacement en fonction des déplacements aux nœuds :

$$\vec{U}(x, y) = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 u_1 + b_2 u_2 + b_3 u_3 \\ b_4 v_1 + b_5 v_2 + b_6 v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{U}(x, y) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & b_5 & 0 & b_6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

Avec, par exemple pour b_1 :

$$b_1(x, y) = \frac{1}{2\Delta} (a_1 + b_1 x + c_1 y)$$

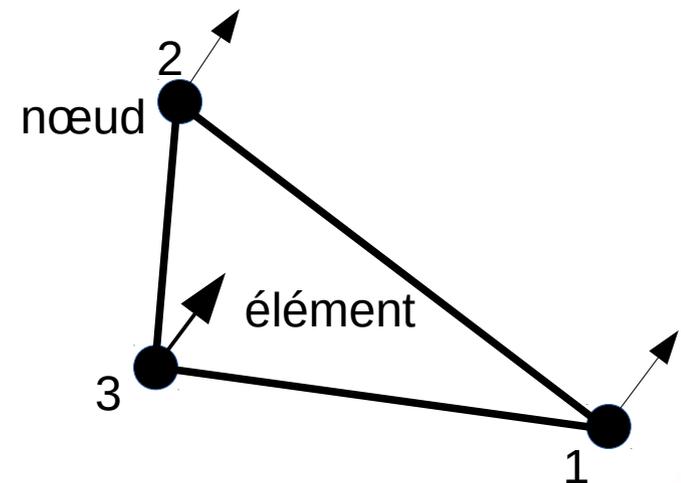
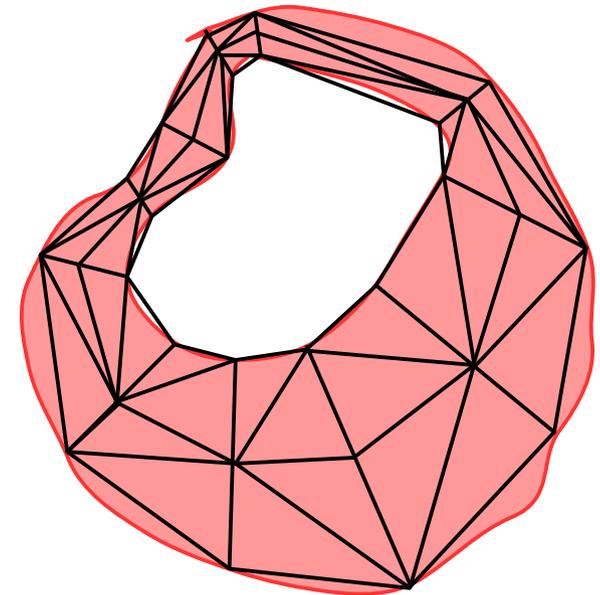


Fonctions d'interpolation du champ de déplacement

- Déplacement en fonction des déplacements aux nœuds :

$$\vec{U}(x, y) = \begin{Bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & b_4 & 0 & b_5 & 0 & b_6 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{U}(x, y) = [N(x, y)] \{U_e\}$$



Relation déplacement - déformations

- Petites déformations (HPP) : $\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$
- Exemple précédent 2D (déformations planes) :

$$\left\{ \epsilon(x, y) \right\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx}(x, y) \\ \epsilon_{yy}(x, y) \\ 2\epsilon_{xy}(x, y) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{Bmatrix}$$

$$\left\{ \epsilon(x, y) \right\} = [L] \vec{U}(x, y)$$

Relation déplacement - déformations

- Dans un élément, en utilisant les fonctions d'interpolations :

$$\{\epsilon(x, y)\} = [L] \vec{U}(x, y) \quad \text{or:} \quad \vec{U}(x, y) = [N(x, y)] \{U_e\}$$

$$\{\epsilon(x, y)\}_{element} = [L] [N(x, y)] \{U_e\}$$

$$\{\epsilon(x, y)\}_{element} = [B(x, y)] \{U_e\}$$

Loi de comportement => expression des contraintes en fonction de la déformation

- Matériau isotrope linéaire : $\sigma = \lambda \text{Trace}(\epsilon) \mathbf{I} + 2\mu \epsilon$
 $\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij}$

- Cas 2D en déformations planes (poursuite exemple 2D) :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ 2\epsilon_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \{ \epsilon(x, y) \}$$

- Dans un élément, on peut écrire :

$$\{ \sigma(x, y) \}_{element} = [D] [B(x, y)] \{ U_e \}$$

Retour à la formulation faible

- Vraie sur chaque sous-domaine, soit sur un élément :

$$\iiint_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \ddot{\vec{U}} d\Omega = - \iiint_{\Omega_{elem}} \{\sigma\} \{\epsilon^*\} d\Omega + \iiint_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \vec{b} d\Omega + \iint_{\tau_{t_i}} \vec{U}^* \vec{t} d\tau$$

Retour à la formulation faible

- Vraie sur chaque sous-domaine, soit sur un élément :

$$\underline{\int\int\int_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \ddot{\vec{U}} d\Omega} = - \int\int\int_{\Omega_{elem}} \{\sigma\} \{\epsilon^*\} d\Omega + \int\int\int_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \vec{b} d\Omega + \int\int_{\tau_{t_i}} \vec{U}^* \vec{t} d\tau$$

où :

$$\underline{\int\int\int_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \ddot{\vec{U}} d\Omega} = \vec{U}^{*T} [M_e] \{\ddot{U}_e\} \quad \text{avec :} \quad [M_e] = \int\int\int_{\Omega_{elem}} [N_{(x,y)}]^T \rho [N_{(x,y)}] d\Omega$$

Retour à la formulation faible

- Vraie sur chaque sous-domaine, soit sur un élément :

$$\iiint_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \ddot{\vec{U}} d\Omega = - \iiint_{\Omega_{elem}} \{\sigma\} \{\epsilon\}^* d\Omega + \iiint_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \vec{b} d\Omega + \iint_{\tau_{t_i}} \vec{U}^* \vec{t} d\tau$$

où :

$$\iiint_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \ddot{\vec{U}} d\Omega = \vec{U}^{*T} [M_e] \{\ddot{U}_e\} \quad \text{avec :} \quad [M_e] = \iiint_{\Omega_{elem}} [N_{(x,y)}]^T \rho [N_{(x,y)}] d\Omega$$

$$\iiint_{\Omega_{elem}} \{\sigma\} \{\epsilon\} d\Omega = \vec{U}^{*T} [K_{elem}] \{U_{elem}\} \quad \text{avec :} \quad [K_e] = \iiint_{\Omega_{elem}} [B_{(x,y)}^T] [D] [B_{(x,y)}] d\Omega$$

Retour à la formulation faible

- Vraie sur chaque sous-domaine, soit sur un élément :

$$\iiint_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \ddot{\vec{U}} d\Omega = - \iiint_{\Omega_{elem}} \{\sigma\} \{\epsilon^*\} d\Omega + \iiint_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \vec{b} d\Omega + \iint_{\tau_{t_i}} \vec{U}^* \vec{t} d\tau$$

où :

$$\iiint_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \ddot{\vec{U}} d\Omega = \vec{U}^{*T} [M_e] \{\ddot{U}_e\} \quad \text{avec :} \quad [M_e] = \iiint_{\Omega_{elem}} [N_{(x,y)}]^T \rho [N_{(x,y)}] d\Omega$$

$$\iiint_{\Omega_{elem}} \{\sigma\} \{\epsilon\} d\Omega = \vec{U}^{*T} [K_{elem}] \{U_{elem}\} \quad \text{avec :} \quad [K_e] = \iiint_{\Omega_{elem}} [B_{(x,y)}^T] [D] [B_{(x,y)}] d\Omega$$

$$\iiint_{\Omega_{elem}} \vec{U}^* \rho \vec{b} d\Omega + \iint_{\tau_{t_i}} \vec{U}^* \vec{t} d\tau = \vec{U}^{*T} \{F_e\} \quad \text{avec :}$$

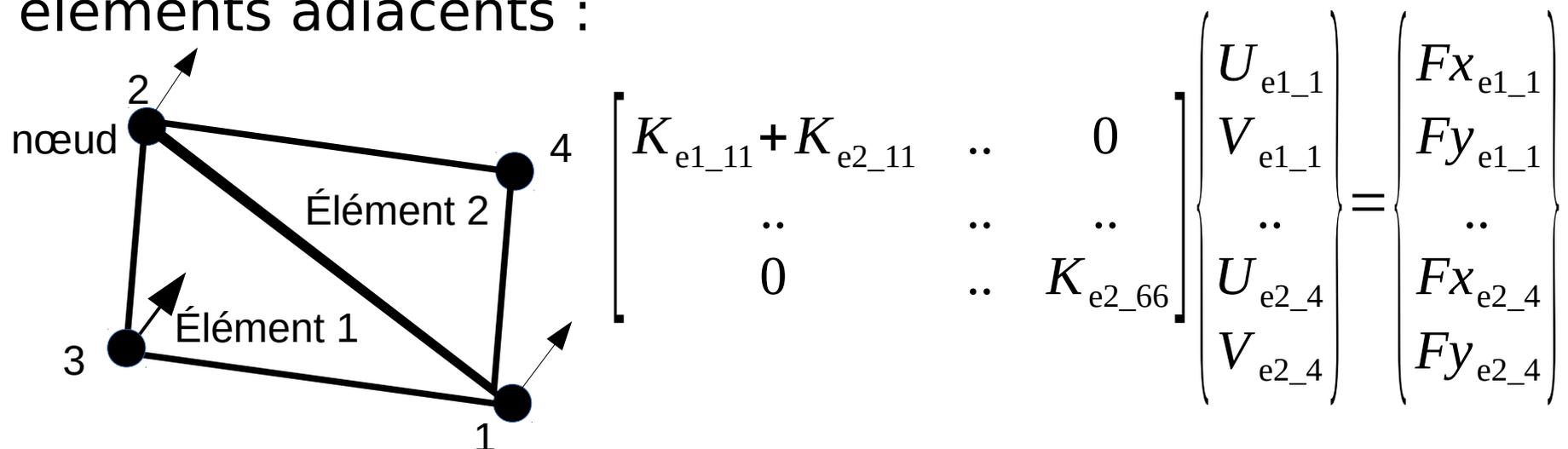
$$\{F_e\} = \iiint_{\Omega_{elem}} [N_{(x,y)}]^T \rho \vec{b} d\Omega + \iint_{\tau_{t_i}} [N_{(x,y)}]^T \vec{t} d\tau$$

Construction équation discrétisée

- Sur l'ensemble du domaine, on obtient :

$$\sum_{e=1}^N [[M_e]\{\ddot{U}_e\} + [K_e]\{U_e\} = \{F_e\}]$$

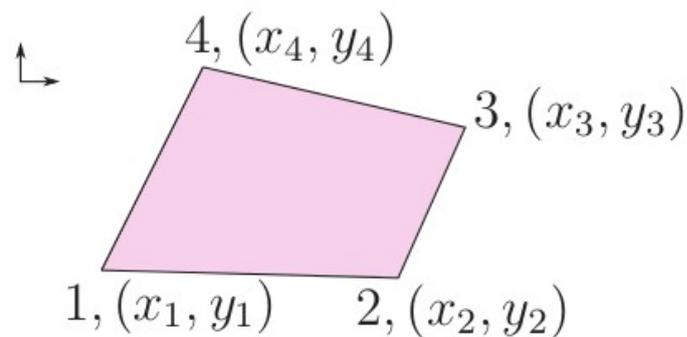
- Cette opération de somme s'appelle l'assemblage, et permet de relier les déplacements des nœuds de deux éléments adjacents :



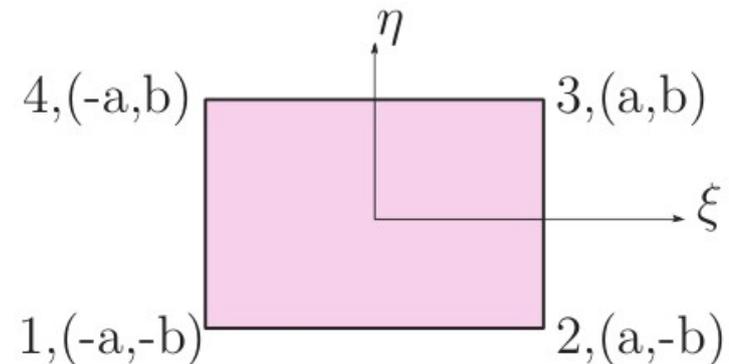
Un détour par les méthodes d'intégration :

$$[K_e] = \iiint_{\Omega_{elem}} [B_{(x,y)}^T] [D] [B_{(x,y)}] d\Omega$$

- Élément de référence, dit « élément parent », qui permet de standardiser le code.
- L'intégration se fait numériquement, sur l'élément parent (1)



(a) Élément réel



(b) Élément de référence

(1) Livre de Hughes et al. 1987

Cas de l'élasto-statique :

$$[K_g]\{U_g\} = \{F_g\}$$

- Quelques propriétés de K_g (1) :
 - Symétrique
 - Définie positive
 - A bande

- Méthodes numériques adaptées : Factorisation de Cholesky, il y a des experts !!

(1) Livre Hughes 1987.

Résolution : réorganisation du système linéaire

- Que fait-on des inconnues dans F_g ?

$$\begin{bmatrix}
 K_{11} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & K_{ij} & K_{ij+1} & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & K_{nn}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_1 \\
 \dots \\
 U_p \\
 V_q \\
 \dots \\
 U_m
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 Fx_1 \\
 \dots \\
 Fx_p \\
 Fy_q \\
 \dots \\
 Fy_m
 \end{pmatrix}$$



$$\begin{bmatrix}
 [K_{11}] & [K_{12}] \\
 [K_{21}] & [K_{22}]
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 U_{connus} \\
 U_{inconnus}
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 F_{inconnues} \\
 F_{connues}
 \end{pmatrix}$$

Résolution : réorganisation du système linéaire

- Que fait-on des inconnues dans Fg ?

$$\begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{connus} \\ U_{inconnus} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{inconnues} \\ F_{connues} \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} U_{inconnus} = ([K_{22}])^{-1} (F_{connues} - [K_{21}]U_{connus}) \\ F_{inconnues} = [K_{11}]U_{connus} + [K_{12}]U_{inconnus} \end{cases}$$

Cas de la dynamique :

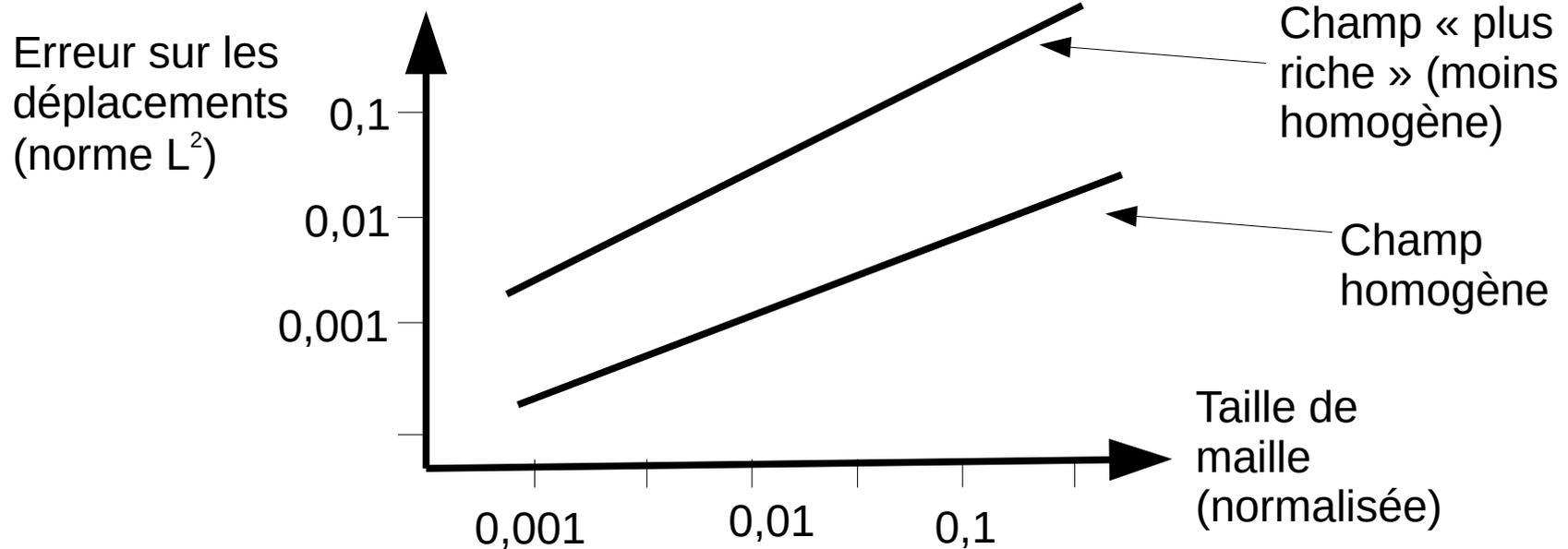
$$[M_g]\{\ddot{U}_g\} + [C_g]\{\dot{U}_g\} + [K_g]\{U_g\} = \{F_g\} \dot{t}$$

- Quelques propriétés de M_g (1) :
 - Symétrique
 - Définie positive
 - A bande
 - Lumped mass => « diagonalisation » de la matrice de masse (pour méthodes explicites)
- Méthodes numériques adaptées : implicite / explicite

(1) Livre de Hughes et col. 1987.

Résolution : convergence

- M.E.F : propriété de convergence vers la solution exacte en diminuant la taille de maille.



- Gold-standard : comparaison aux solutions analytiques

Résolution : convergence

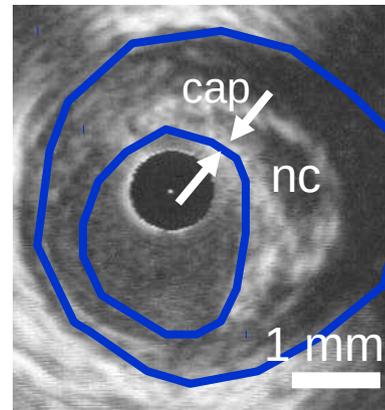
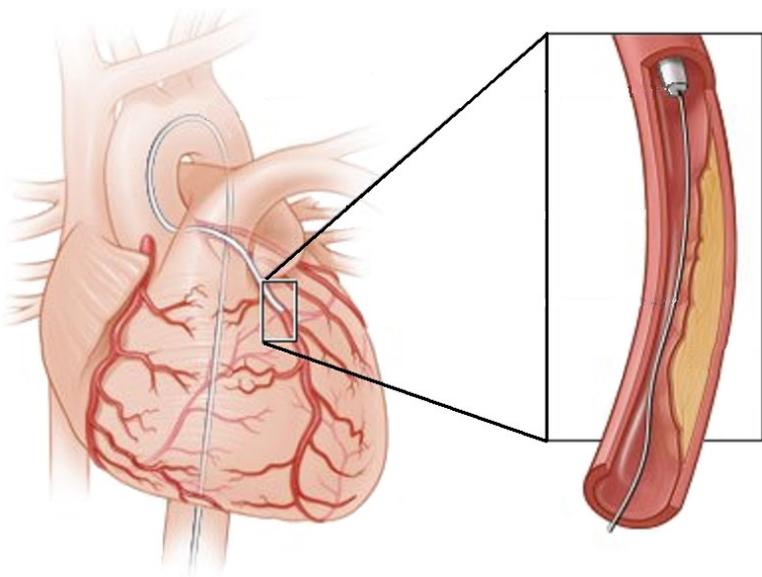
- Cas général : on peut tracer l'évolution de la norme (H2, L1, ...) du champ de déplacement en fonction de la taille de maille => TP

Étapes générales pour simuler les déformations d'un organe

- Simplification du problème mécanique
- Récupération de la géométrie (segmentation, modèles géométriques)
- Maillage
- Lois de comportement locales
- Conditions aux limites
- Construction du système d'équations discrétisées
- Résolution
- Post-traitement

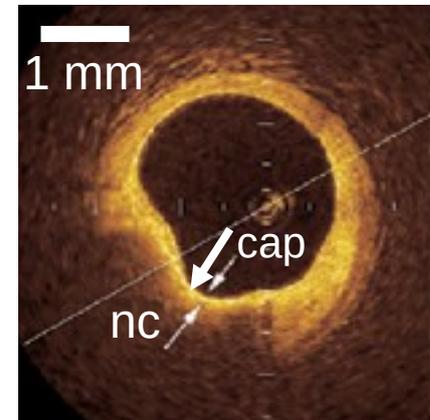
Récupération de la géométrie

- Segmentation semi-automatique sur échographie intra-vasculaire(1) :



IVUS – Intravascular ultrasound

nc = necrotic core

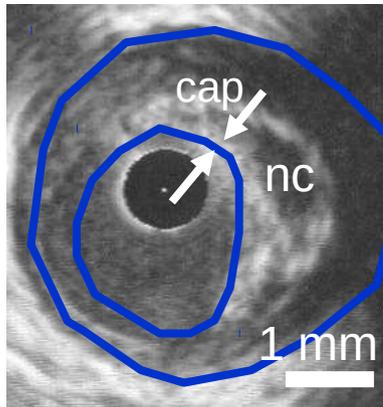


OCT – optical coherence tomography

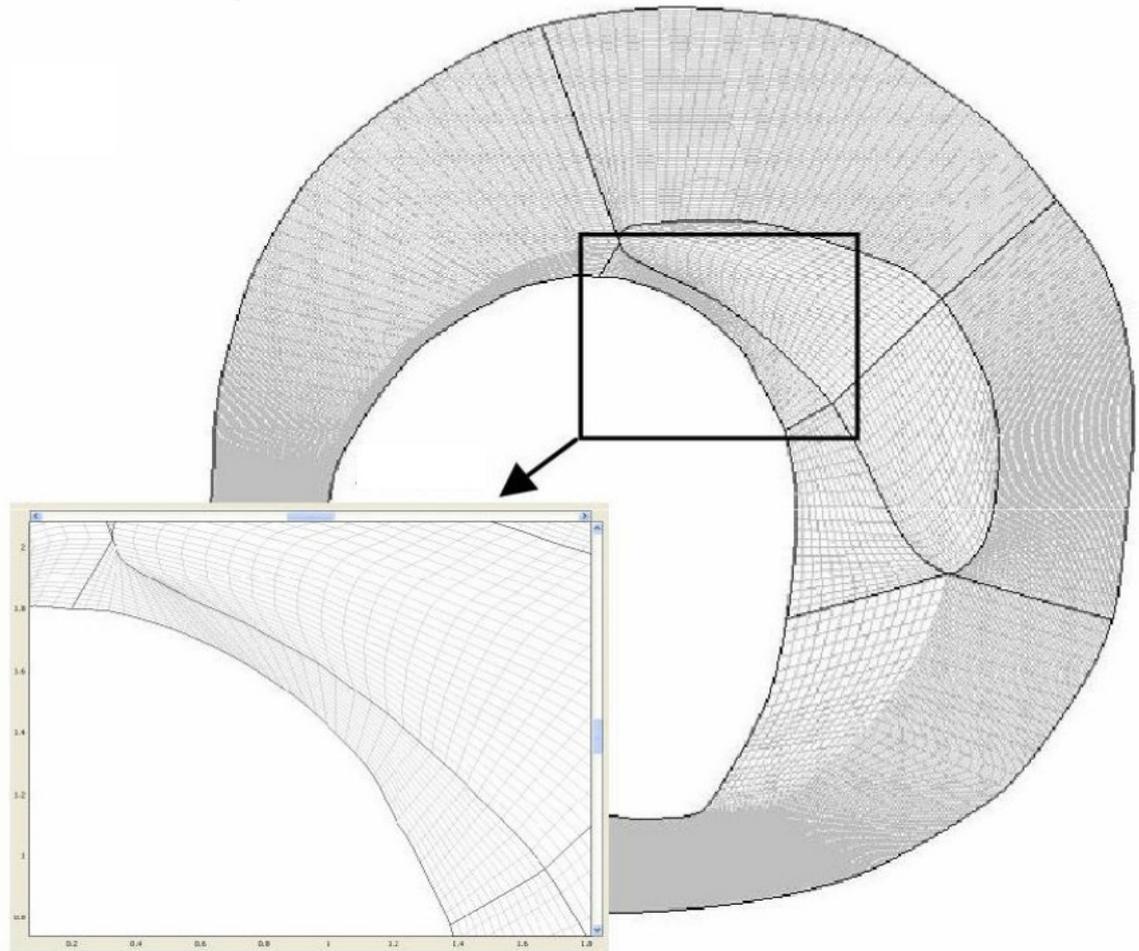
(1) Marie-Hélène Roy-Cardinal, LBUM

Maillage

- 2D maîtrisé, 3D assez complexe
- Choix interpolation



IVUS – Intravascular
ultrasound

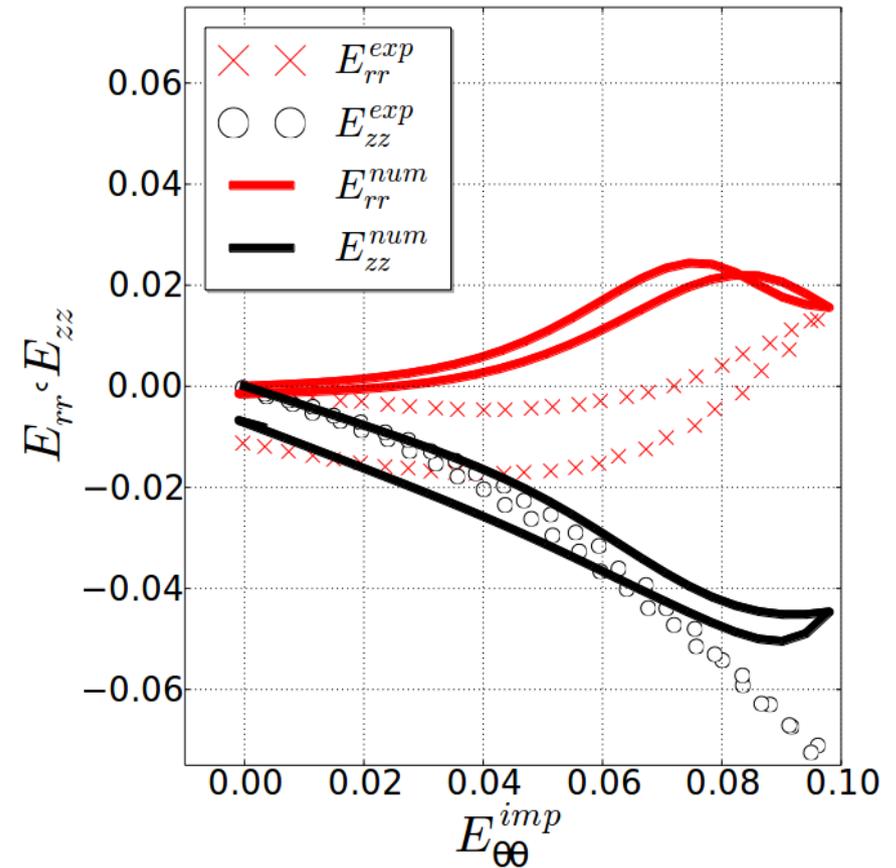
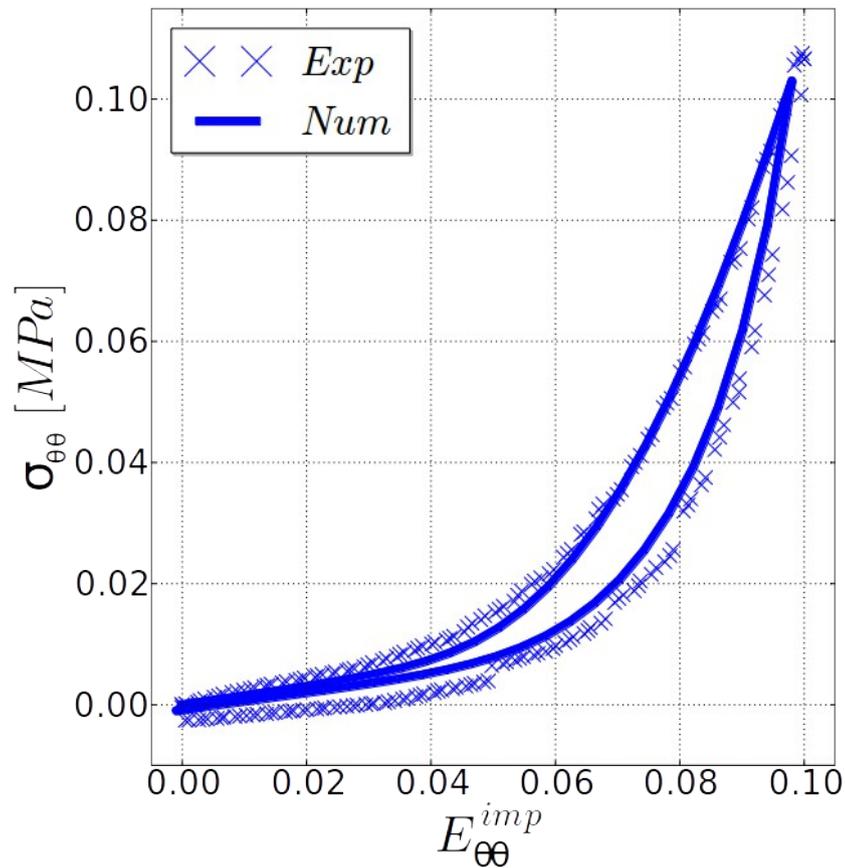


Lois de comportement locales

- Caractérisations **in vivo** : le Graal mais (très) complexe => modèle très simplifié
- Caractérisations **ex vivo** : grande finesse, phénomènes multi-physiques captés, mais... non patient-spécifique.

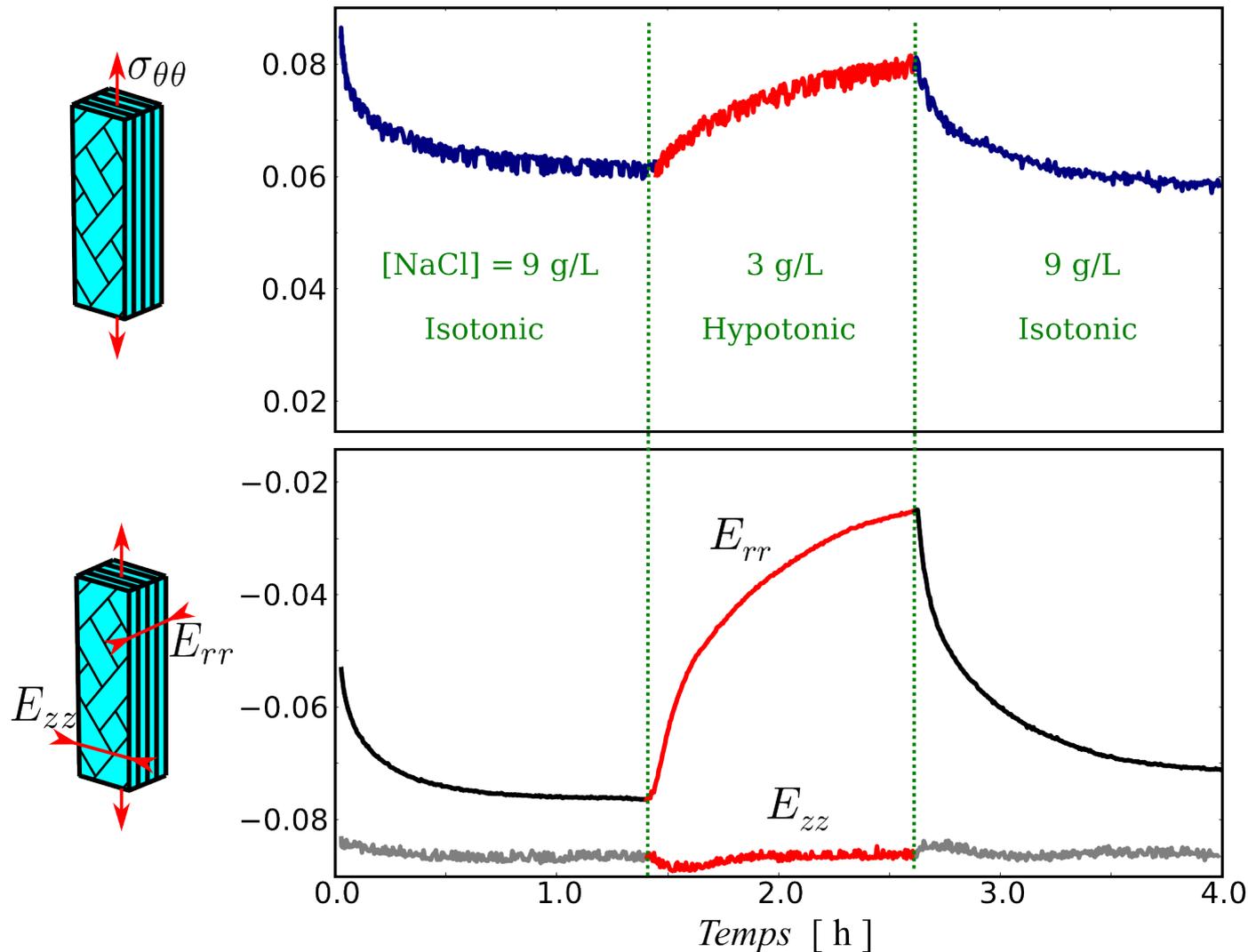
Comportement physico-chimique du disque intervertébral (Baldit, Ambard et al. 2013)

Comportement hydro-mécanique



Comportement physico-chimique du disque intervertébral (Baldit, Ambard et al. 2013)

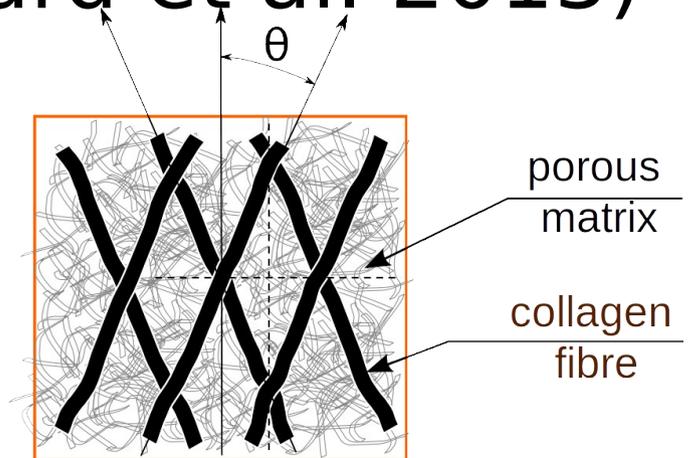
Comportement chimio-mécanique



Comportement physico-chimique du disque intervertébral (Baldit, Ambard et al. 2013)

Couplage chimio-hydro-mécanique

$$\sigma = \frac{2}{J} F \frac{\partial W}{\partial C} F^T - p I + \pi I$$



Transfert de la phase fluide

- loi de Darcy → perméabilité

$$\vec{q} = -\frac{k}{\mu} \vec{\nabla} p$$

Pression électro-osmotique

- dépend des charges fixes

$$\pi = -2RT \left[\sqrt{c_{ext}^2 + \frac{c_f^2}{4}} - c_{ext} \right]$$

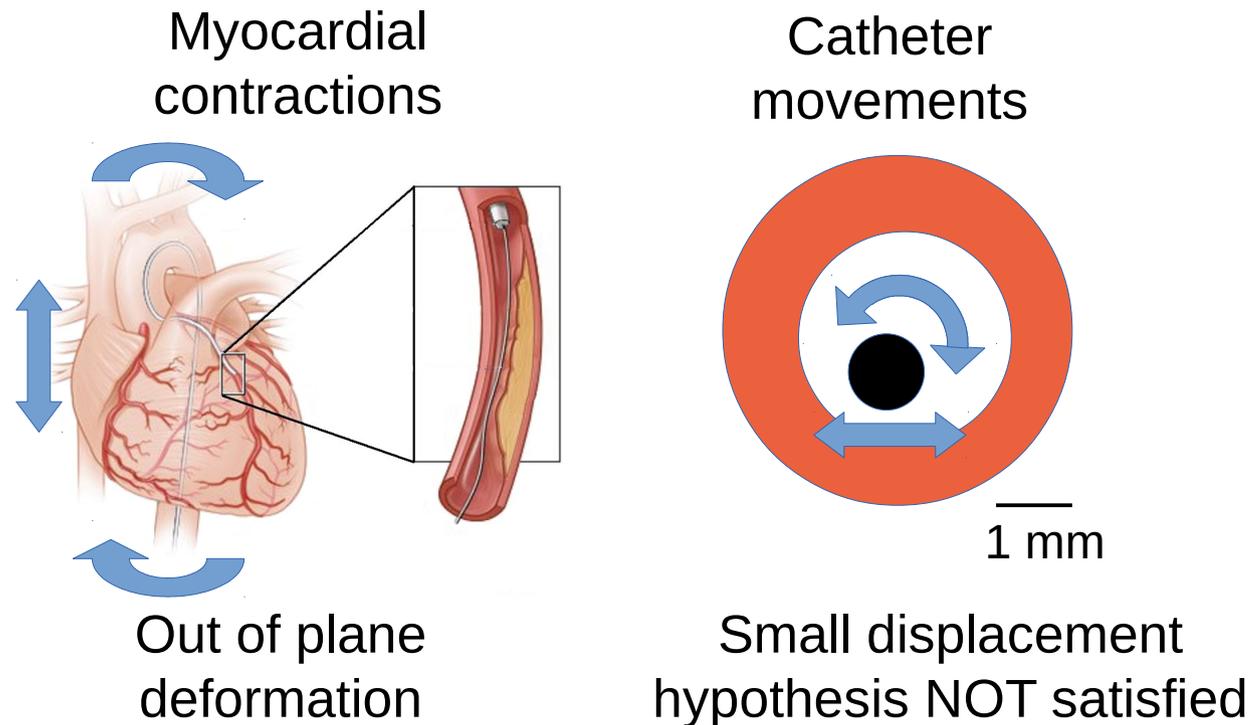
Comportement mécanique

- formulation hyper-élastique
- matrice poreuse isotrope
- 2 familles de fibres

$$W = \frac{G}{2} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{K}{2} (J - 1)^2 + \frac{1}{2k_2} \sum_{i=1,2} k_1 \left[e^{k_2 (\bar{I}_{4i} - 1)^2} - 1 \right]$$

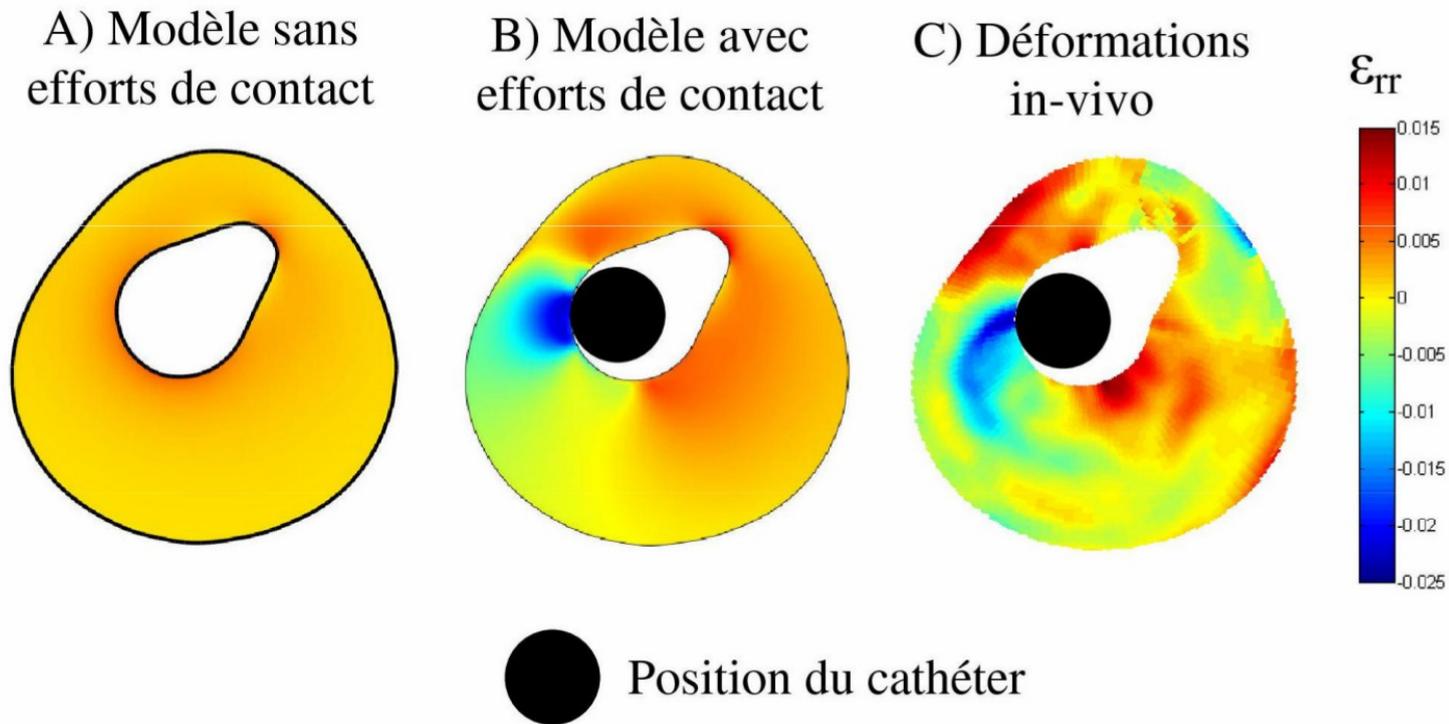
Conditions aux limites

- Artère coronaire accrochée au cœur avec pression pulsatile sur la paroi intérieure :



Conditions aux limites

- Contact cathéter - paroi :



Post-traitement

- 3 types de sorties : les champs de déplacements, les champs de force et les tenseurs aux points d'intégration

TP : proposition de démarche

- Présentation du code simplifié
- Tracé de la géométrie et de la déformée pour un cas avec inclusion et pression sur le dessus.
- Temps de CPU sur les différentes étapes clefs Nelem = [100, 400, 1600, 10 000].
- Convergence de la norme des déplacements en fonction du maillage pour 2 cas : un cas à champ « homogène », un cas « non-homogène »
- Problème de localisation de contrainte : convergence ?

Points critiques spécifiques E.F.

- **Maillage : convergence.**
- Choix du type de **fonctions d'interpolation** (physique en jeu et allure des champs résultats).
- Phénomène de **locking (1)**.
- Continuité du champ de déplacement => XFEM.
- **Maillage/géométrie : concentration de contraintes.**
- **Taille des matrices !! => parallélisation (2).**
- **Temps de calcul.**

(1) Babuska and Suri, 1992 et voir le bouquin de Hughes (ref à la fin).

(2) « Programming the Finite Element Method ». IM. Smith, D.V. Griffiths and L. Margetts.

Points critiques généraux modélisation

- **Linéarité géométrique et matériau**
- Conditions aux limites en déplacement et en force dans les conditions **in vivo** => élastographie
- Lois de comportement **patient-spécifique**
- **Interactions entre solides : contact => mécanique non-régulière**

Références :

- Méthode E.F. élasticité linéaire : « The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis ». Thomas J. R. Hughes
- Méthode E.F. élasticité non-linéaire : « Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures ». Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran.
- « Programming the Finite Element Method ». IM. Smith, D.V. Griffiths and L. Margetts.